EXERCICE N°4 : 30' 5 points

1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\, e^{\left(\frac{1-x}{2}\right)}$.

Dresser le tableau de variation de f. En déduire que pour tout réel $x \in [0\ ,\ 1]$, $0 \le f(x) \le 1$.

2) On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $I_n = \dfrac{1}{n!\,.\,2^{n+1}} \displaystyle\int_0^1 x^n\, e^{\left(\frac{1-x}{2}\right)}\, dx$ et $u_n = 1 + \dfrac{1}{1!\,.\,2} + \dfrac{1}{2!\,.\,2^2} + \ldots + \dfrac{1}{n!\,.\,2^n}$.

a) Montrer que $I_1 = \sqrt{e} - \dfrac{3}{2}$. **b)** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $I_{n+1} = I_n - \dfrac{1}{(n+1)!\,.\,2^{n+1}}$.

c) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = \sqrt{e} - I_n$.

d) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $0 \le I_n \le \dfrac{1}{n\,(n!)\,2^{n+1}}$. Déduire la limite de u.

EXERCICE N°5 : 40' 6 points

Soit f la fonction définie sur $[0\ ,\ +\infty[$ par $f(x) = \ln\left(e^x + e^{-x}\right)$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère ON (unité 3cm).

1) a) Montrer que pour tout $x \in [0\ ,\ +\infty[$; $f(x) = x + \ln\left(1 + e^{-2x}\right)$.

b) En déduire que la droite D : y = x est une asymptote à (C). Préciser la position de (C) et D.

c) Dresser le tableau de variation de f. Construire (C) et D.

2) a) Montrer que f réalise une bijection de $[0\ ,\ +\infty[$ sur $[\ln 2\ ,\ +\infty[$.

b) Tracer (C') la courbe de f^{-1} sur le même repère que (C).

3) Pour tout $x \in [0\ ,\ +\infty[$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x \ln\left(1 + e^{-2t}\right) dt$.

a) Soit $\alpha > 0$. Donner une interprétation géométrique de $F(\alpha)$.

b) Etudier le sens de variations de F sur $[0\ ,\ +\infty[$.

c) Soit $x > 0$. Montrer que pour tout $t \in [1\ ,\ 1+x]$, on a : $\dfrac{1}{1+x} \le \dfrac{1}{t} \le 1$ puis déduire que

$$\frac{x}{1+x} \le \ln(1+x) \le x\,.$$

d) Soit $x > 0$. Montrer alors que $\dfrac{1}{2}\left[\ln 2 - \ln\left(1 + e^{-2x}\right)\right] \le F(x) \le \dfrac{1}{2}\left(1 - e^{-2x}\right)$.

4) Pour tout entier n on pose $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \ln\left(1 + e^{-2t}\right) dt$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

a) Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \le u_n \le \ln\left(1 + e^{-2n}\right)$. En déduire la limite de u.

b) Montrer que $S_n = F(n+1)$. En déduire que (S_n) est convergente.

Qarray.tn - Aqra Blech- Qarray.tn